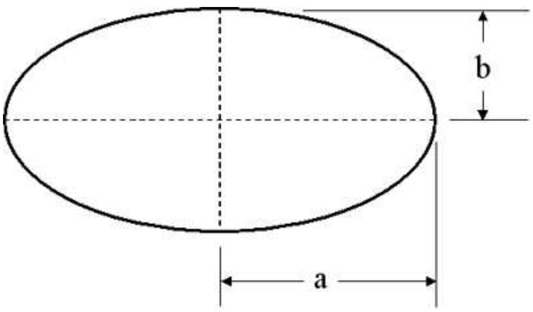
Bresenham - Ellipse



Die Ellipse lässt sich durch die Gleichung

$F(x,y) \;=\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1$

beschreiben. Die Gleichung kann dabei als `implizite Funktion` aufgefasst werden. Gemeint ist hiermit, dass eine Abhängigkeit zwischen x und y besteht.

Um die Ellipse nach Bresenham zu zeichnen, sind die folgenden Eigenschaften analog zum Kreis relevant.

$$F_{Ellipse} = \begin{cases} < 0 & (x,y) \quad liegt\ im\ Polygon \\ = 0 & (x,y) \quad liegt\ auf\ dem\ Polygon \\ > 0 & (x,y) \quad liegt\ außerhalb\ des\ Polygons \end{cases}$$

Auch für die Herleitung des Bresenham - Algorithmus für Ellipsen besteht die Notwendigkeit, die Entscheidungsgrößen herzuleiten. Allerdings reicht es hier aus, den 1. Quadranten für die Herleitung zu verwenden, da alle anderen Fälle durch die Symmetrieeigenschaften der Ellipse gewinnbar sind.
Eine Besonderheit stellt gegenüber dem Kreis die Abbruchbedingung bei der Änderung des Krümmungsverhaltens der Ellipse dar. War es beim Kreis ausreichend, die Winkelhalbierende als Symmetrieachse zu verwenden, reicht dieses Vorgehen für die Ellipse nicht mehr aus. Hier macht man sich die eine Eigenschaft zunutze, die besagt, dass es zu einer Änderung des Krümmungsverhaltens kommt, wenn die Tangente den Anstieg -1 besitzt.

Die Herleitung der Abbruchbedingung stützt sich dementsprechend auf folgendes Vorgehen, welches die oben beschriebene Gleichung für die implizite Funktion der Ellipse verwendet.

Abbruchbedingung

$F(x,y) \;=\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1 \rightsquigarrow x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$

woraus nach Umstellung folgt

$y^2 = \frac{a^2b^2 - x^2b^2}{a^2} \rightsquigarrow y = \sqrt{b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}}$

die Ableitung ergibt nun

$y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}}} \cdot \frac{-2x\cdot b^2}{a^2}$

Ersetzt man nun y erhält man die erforderliche Bedingung $y' = \frac{-2x\cdot b^2}{2y\cdot a^2} = -1$

Aufgabe

Implementieren und spezifizieren Sie eine Ellipse nach dem Bresenham Algorithmus.